散乱の量子論

— 加藤スクールからエンス, シーガルへ —

北田　均

加藤スクールというのは加藤敏夫の影響を受けてできあがった研究傾向のひとつと解釈しよう。加藤敏夫は第二次世界大戦後 40 歳を過ぎて東京大学からカリフォルニア大学バークレー校に移り現在 70 歳を過ぎても活発に研究活動を続けている。加藤の研究論文や専門書の影響は非常に幅広く直接間接を問わずその影響を受けていない数理物理の研究者は少ないだろう。加藤自身は物理出身で、直接の教えを受けた黒田成俊、池部晃生らも物理出である。またデンマーク人アーネ・イェンセンやアメリカ人ジェイムズ・ハウランドなども加藤の門下生である。ここでは加藤に影響された研究のうち量子力学主に散乱理論に関係するものを、特に「加藤スクール」と呼ぶことにする。

加藤スクールが登場したのは加藤自身が量子力学の数学的側面とくにハミルトニアンの自己共役性に興味を持ち、レリッヒと独立に、現在「加藤・レリッヒの定理」と呼ばれている自己共役性に関する基本定理を証明した事から始まる。(1951 年) 散乱の量子論ないし散乱理論が定式化されたのはそのあとでヤオホ等により多体の場合も込めて定式化が与えられた。(1958 年)

その後加藤、池部、黒田、及び彼らの後継者たちによって、加藤スクールではおもに 2 体の場合の散乱が研究の対象になり、厳密且つ精緻な定常的方法が展開された。その間池部による固有関数展開の論文 (1960 年) に影響を受けてヨーロッパでもファデーエフなどにより 3 体の場合の散乱がやはり定常的方法によって研究されていた。(1963 年)

副題のフォルカー・エンスは生粋のドイツ人であり現在ドイツのアーヘンにいるが、定常的方法とは根本的に異なる発想による「時間に依存する」方法を編み出した。イスラエル・シーガルは旧ソヴィエト連邦から脱出したユダヤ系の数理物理学者で現在カナダのトロント大学に職を持っているが、定常的方法と時間に依存する方法との橋渡しである「スムース」という加藤の創出した概念を用いてゾーファーと共に多体の場合の散乱理論において重要な結果を証明した人である。彼らはともに出身は物理系だが、研究の中から興味を数理物理に移していった人たちである。これらの人たちが現代の散乱理論の先端をなすに至ったのは、最近は PC マガジンにも記事を寄せているバリー・サイモンの数学的且つ政治的影響力が働いたおかげであった。サイモン自身加藤、池部、黒田らの影響のもとに研究を始めた人であるが、彼はプリンストン大学にいた頃からエンス、シーガル、谷島賢二らを招いて深い刺激を彼らに与えたようである。バリー・サイモンもユダヤ系でニューヨーク育ちのアメリカ人であり、現在はカリフォルニア工科大学にいる。後に述べるようにカリフォルニアに移ってからもアメリカの内外から多くの研究者を招き現在の多体問題の研究の隆盛を招いた人物である。

1　散乱理論

散乱の量子論とは素粒子同士の衝突現象を研究する分野である。電子や陽子といったいわゆる素粒子は量子力学に従った振る舞いをすると考えられている。スピンなどによって生ずる原子のエネルギー準位の微細構造といった細かいことを考えないならばこういった素粒子はシュレーディンガー方程式に従うとされる。$\psi(t,x)$ をある量子系の波動関数とするとそれの従うシュレーディンガー方程式は

$$\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{i\partial t}\psi(t,x) + H\psi(t,x) = 0, \qquad (1)$$

$$\psi(0,x) = f(x) \quad (\text{初期条件}) \qquad (2)$$

で与えられる。ここで H は考えている系のハミルトニアンでその系のポテンシャル関数を $V(x)$ とすると

$$H = H_0 + V(x) \tag{3}$$

で与えられる。H_0 はポテンシャルがない場合のハミルトニアンでたとえば 2 体の量子系では

$$H_0 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) \tag{4}$$

の形の微分作用素と考えてよい。h はプランク定数、$m > 0$ は 2 体系の換算質量で単位系を適当にとって $h/2\pi = m = 1$ とできる。

2 個の素粒子の衝突を考えるということは 2 体系のハミルトニアン $H = -\Delta/2 + V(x)$ のもとでの波動関数 $\psi(t,x)$ の $t = -\infty$ から $t = +\infty$ までの挙動を追跡することに相当する。この場合のシュレーディンガー方程式の解は少なくとも形式的に

$$\psi(t,x) = e^{-itH} f(x) \quad (t \in \mathbf{R}) \tag{5}$$

で与えられる。この表式は H が $X = L^2(\mathbf{R}^3)$ というヒルベルト空間での自己共役作用素であるという事実から正当化される。ポテンシャル $V(x)$ が短距離力に対応するものであるとき、即ち、$|x| \to \infty$ で $V(x)$ が $|x|^{-1}$ より速く減衰するときは波動作用素

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} \tag{6}$$

が存在する。$s - \lim$ とはヒルベルト空間 X でのある極限のことである。この波動作用素は $t = \pm\infty$ で挙動が一致するふたつのシュレーディンガー方程式

$$(D_t + H)\psi(t) = 0, \tag{7}$$

$$(D_t + H_0)\psi_0(t) = 0 \tag{8}$$

の解 $\psi(t)$, $\psi_0(t)$ の初期条件 (2) の間の対応を与えるものである。これから衝突ないし散乱現象を把えるために散乱作用素

$$S = W_+^* W_- \text{``}=\text{''} s - \lim_{t\to\infty} e^{itH_0} e^{-2itH} e^{itH_0} \tag{9}$$

が導入される。ここで 2 番目の等号をクォーテイションマークでくくったのは右辺の極限が存在するかどうか「すぐには」分からないからである。波動作用素 $W_\pm$ の存在自身も証明を要するがそれ以上にこの極限 (9) の存在は自明ではない。物理の本ではこの極限の代わりに十分大きな時刻 t で (9) の $s - \lim$ の中の作用素を考えることで事足れりとしている。実際の実験では $t \to \pm\infty$ の極限まで散乱現象を追跡することは不可能であるので、これで十分なのであるが、数学的に見て $t \to \pm\infty$ の極限が存在するかを問うことも数理物理としては意味がある。また (9) の極限の存在は散乱作用素のユニタリー性の問題であり、素粒子の量子力学的存在確率の保存則が理論として成り立つかどうかの問題とも解釈される。この意味でも基本的な数理物理の問題のひとつとみなされる。この問題は波動作用素の存在が分かっているときは

$$R(W_+) = R(W_-) \tag{10}$$

が成り立てば解決し散乱作用素 S はユニタリーとなる。但し $R(W_\pm)$ は $W_\pm$ の値域を表す。(10) を波動作用素の「漸近的完全性」という。

$V(x)$ が短距離力でない場合、すなわち、$V(x)$ が $|x| \to \infty$ で $|x|^{-1}$ と同じかより遅く減衰するときを長距離力という。この場合 (6) は必ずしも存在せず (たとえばクーロン場 $V(x) = c|x|^{-1}$ のとき) (6) の e^{-itH_0} を修正して修正波動作用素

$$W_\pm^D = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-iW(D,t)} \tag{11}$$

を定義するとこの極限が存在する事がある。ここで $W(D,t)$ $(D = -i(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3))$ は滑らかな関数 $W(\xi,t)$ を表象とする擬微分作用素で $W(\xi,t)$ はハミルトニアン H に対応する古典力学のハミルトン-ヤコビ方程式の解である。この意味で長距離力の場合は古典力学が散乱の量子力学的性質の解明に直接的に関係しており、古典論と量子論との緊密な関係が明きらかとなる場合である。この場合も (10) で $W_\pm$ を $W_\pm^D$ で置き換えた関係が成り立つ事がありこれを修正波動作用素 $W_\pm^D$ の漸近的完全性という。

衝突現象を研究するためにはさらに散乱作用素 S の構造を調べる必要がある。しかし与えられた副題に最も関係の深いものはこの (漸近的) 完全性なのでこれ以上の問題の解説は他の機会に譲る。

完全性 (10) は 2 体の場合は基本的に加藤スクールの人たちによって解決されたといってよいだろう。エ

ンス、シーガルらが登場するのは本質的に多体の場合である。多体の場合は問題の定式化自体が与えられた紙数以上のものを要するので以下 2 体の場合にこれら加藤スクールとエンス、シーガルらのとった方法を見てみよう。

2　定常的方法–加藤スクール

加藤スクールの人たちの完全性の問題へのアプローチは (6) を微分積分学の基本定理を使って

$$\begin{aligned} W_+ &= I + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{d}{dt} e^{itH} e^{-itH_0} dt \\ &= I + \lim_{T\to\infty} i \int_0^T e^{itH} V e^{-itH_0} dt \end{aligned} \tag{12}$$

と書き換え、さらにアーベル極限に移り

$$W_+ = I + \lim_{\epsilon\downarrow 0} i \int_0^\infty e^{-2\epsilon t} e^{itH} V e^{-itH_0} dt \tag{13}$$

としてフーリエ変換に関するプランシュレルの等式を使って

$$\begin{aligned} &W_+ \\ &= I - \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(\lambda - i\epsilon) V R_0(\lambda + i\epsilon) d\lambda \end{aligned} \tag{14}$$

によって $W_\pm$ を時間によらない形に書き換えるところから始まる。但し、$R(z) = (H-z)^{-1}$, $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ $(\mathrm{Im}\ z \neq 0)$ は H, H_0 のリゾルベント。問題はリゾルベントの $\mathrm{Im}\ z \to 0$ での極限がどのような空間の間の作用素として存在するかに帰着する。加藤スクールの人々や後から参入したアグモンという人たちの示した事は次の不等式で代表される。任意の $\delta > 1/2$ とある範囲の $\lambda \in (0,\infty)$ に対し

$$\sup_{\epsilon>0} \|\langle x\rangle^{-\delta} R(\lambda \pm i\epsilon) \langle x\rangle^{-\delta}\| \le \mathrm{Const.} \tag{15}$$

但し $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$.　この不等式は後にムーレ、ペリー-シーガル-サイモンらによって長距離力を含む多体の場合に拡張された。2 体の場合この不等式は $V(x)$ が空間の全方向に対し一様に減少する事が本質的に使われたが、多体の場合にはこの方法は拡張できない。ムーレによって考え出された巧妙な方法によって初めてこの不等式が多体の場合に拡張された。

(15) を極限吸収原理という。これはエイドゥス、ポヴツナーなどに遡る古典的方法である。さらに遡ればシュレーディンガーによる摂動法も時間に依存しない定常的シュレーディンガー方程式を解析しているという意味でこの範疇に属する。

加藤-黒田 (1970, 71 年) や黒田 (1973 年) の論文でもアグモンの論文 (1975 年) でも、H に対する極限吸収原理 (15) は H_0 に対する (15) を示し、それからコンパクト作用素に対する抽象的な関数解析の議論を用いて行われ、摂動法の抽象的一般化を与えた。これらは 1960 年代から 1970 年代前半にかけての事であった。

加藤敏夫は 1966 年の論文で (15) から

$$\int_{-\infty}^\infty \|\langle x\rangle^{-\delta} e^{-itH} E_H(B) f\|^2 dt \le C\|f\|^2 \tag{16}$$

が導かれる事を示しこれを $\langle x\rangle^{-\delta}$ は (集合 $B \subset (0,\infty)$ 上)H-スムース (あるいは H に関してスムース) であると呼んだ。このことから、極限

$$\Omega_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH} E_H(B) \tag{17}$$

の存在がシュワルツの不等式を用いて簡単に証明される。つまり $V(x) = \langle x\rangle^{-\delta} L \langle x\rangle^{-\delta}$ (L は X での有界作用素) と書き、(17) を (12) のように書き直したときの積分を $T > S > 0$ に対し

$$\begin{aligned} &\left| \left(\int_S^T e^{itH_0} V e^{-itH} E_H(B) dt f, g \right) \right| \\ \le\ & \int_S^T |(L\langle x\rangle^{-\delta} e^{-itH} E_H(B) f, \langle x\rangle^{-\delta} e^{-itH_0} g)| dt \\ \le\ & C \left\{ \int_S^T \|\langle x\rangle^{-\delta} e^{-itH} E_H(B) f\|^2 dt \right\}^{1/2} \\ & \times \left\{ \int_S^T \|\langle x\rangle^{-\delta} e^{-itH_0} g\|^2 dt \right\}^{1/2} \\ \le\ & C\|f\|\|g\| \end{aligned} \tag{18}$$

と評価すればコーシーの判定条件より極限 (17) の存在が言える。(17) の存在から完全性を言うのは容易である。後に述べるシーガル-ゾーファーの方法はこのような評価法をもとにしている。

2 体長距離力の場合も (15) が示されてはじめて修正波動作用素の完全性が証明された。この場合時間

に関する微分

$$\frac{d}{dt}e^{itH}e^{-iW(D,t)}$$
$$= ie^{itH}\{H_0 + V(x) - \partial_t W(D,t)\}e^{-iW(D,t)} \tag{19}$$

の中の $\{\ \}$ 内の因子が $W(\xi, t)$ がハミルトン-ヤコビ方程式を満たすおかげで t ないし $|x|$ についてある意味で「積分可能」になることが使われた。1970 年代後半の事である。

3 時間に依存する方法–エンス法

エンスは加藤スクールとはまったく異なった観点から出発し完全性を証明する方法を編み出した。彼の出発点はルエレの定理である。つまり、エンスによって一般化された形で言えば、$\psi(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ の台が有界で H の「連続スペクトル」に含まれており、K を $K\psi(H)$ が X でのコンパクト作用素となるような作用素とするとき次が成り立つ。

$$\lim_{|T|\to\infty} \left\| \frac{1}{T}\int_0^T Ke^{-itH}\psi(H)dt \right\| = 0. \tag{20}$$

球 $|x| < R$ の特性関数 $\chi_R = \chi_{\{|x|<R\}}$ が $\chi_R\psi(H)$ をコンパクト作用素とすることと考え合わせれば、(20) から $f \in X$ が H の連続スペクトル空間に属すれば、任意の $R > 0$ に対し、

$$\lim_{|T|\to\infty} \left\| \frac{1}{T}\int_0^T \chi_R e^{-itH} f dt \right\| = 0. \tag{21}$$

が従う。つまり、時間平均の意味で、H の連続スペクトル空間の元 f から出発した粒子は時間 $t \to \pm\infty$ では任意の大きさの球 $|x| < R$ の外へ浸み出してしまうのである。この意味で連続スペクトル空間の元 f は「散乱 (された) 状態」といえよう。この事実だけから出発してエンスは (17) の存在を収束に関するコーシーの判定条件を使って直接に示し、完全性を証明した。途中の議論で e^{-itH_0} に対する相空間での評価を用いている。この評価は関係式

$$e^{itH_0}\left(\frac{x}{t} - D\right)e^{-itH_0} = \frac{x}{t} \tag{22}$$

と同様のものであり、その意味は煎じ詰めれば粒子の波動関数は不確定性関係に矛盾しない範囲で自由な古典軌道 $x = tp$ (p は運動量) の上に集中しているという事である。この方法は相空間 $\mathbf{R}_x^3 \times \mathbf{R}_p^3$ の幾何学的な分解を使うという意味でサイモンらによってジオメトリック法とも呼ばれた。

4 紆余曲折–シーガル-ゾーファー論文

エンスがこの証明を与えたのは 1978 年の論文においてであり、加藤スクールの複雑な関数解析的議論を経ずして非常に簡明な形で短い論文によって完全性を示した点でその後の散乱理論の研究に与えた影響は大きかった。翌年の論文でエンスは自分の方法を 2 体長距離力の場合に拡張した。さらに 1980 年代はじめ頃エンスはこの方法を 3 体短距離力の場合に当てはめ多体の場合の完全性の証明で初めて満足のゆく結果を与えた。より多体の場合への彼の方法の拡張ははじめ簡単のように思われた。しかし 3 体のエンス法では 2 体の部分系の特殊な性質を使っていた。1984, 5 年頃様々な人がより多体の場合の完全性に攻勢をかけたがこれといった成果は上がらなかった。そうこうするうち 1985 年の論文でエンス自身は 3 体長距離力のある場合について完全性の証明を与える事に成功した。

一般の多体の場合については 1985 年 3 月頃にひとつの山場が来た。エンスはサイモンに招かれ 6 カ月ほど滞在していたカリフォルニア工科大学のセミナーで (22) に相当する評価を一般の多体のハミルトニアンに対して与えた。この頃シーガルはカリフォルニア大学アーヴァイン校に、ゾーファーはエンスと同じカリフォルニア工科大学にいたが、彼らは共同で多体短距離力の場合について完全性の証明の大まかな概要を得、その年の夏頃プレプリント第一校を配った。この校はたいへん不完全でシーガル-ゾーファーの論文は誤りであると多くの人が思ったようである。その後第二校が 1986 年暮れに配られサイモンやフンティカーといった大御所の支持表明の手紙がこの分野の研究者らに送られるといった事態になった。この第二校は 1987 年に出版されたが、この段階でもシーガル-ゾーファーの論文の難解さと小さいが気になる様々な論文中のミスなどのためこの分野の

多くの研究者は彼らの結果に対して「眉唾もの」と思っていた節がある。

このようなシーガル-ゾーファー論文に対する不信感ないし懐疑的な空気はこの分野の研究者の一人一人がその論文を読んで納得した 1990 年頃まで続いたようである。現在では少なくとも 4 つの別証明が与えられ、また彼らのキーとなる評価の別証明もいくつか発表されるという状況で、もう彼らの結果を疑う人はいないようである。

5 シーガル-ゾーファーの方法–相空間の巧妙な分解

シーガル-ゾーファーの論文では作用素

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\langle x\rangle}\cdot D + D\cdot\frac{x}{\langle x\rangle}\right) \tag{23}$$

が重要な役割をはたす。2 体の場合でこの作用素の意味を考えてみると次のようになる。$B = (E-\delta, E+\delta)$ ($E > 0$, $\delta > 0$ は十分小) として散乱状態 $e^{-itH}E_H(B)f$ の上で γ がどのような挙動を示すかを考えると、前に (22) 式のところで述べたエンスの評価から推測されるように $t \to \pm\infty$ で $x \approx tD$ かつ $|D|^2 = 2H_0 \approx 2(H_0 + V(x)) = 2H \approx 2E$ だから、$e^{-itH}E_H(B)f$ 上

$$\begin{aligned}\gamma &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{tD}{\langle tD\rangle}\cdot D + D\cdot\frac{tD}{\langle tD\rangle}\right)\\ &\approx \pm|D| \approx \pm\sqrt{2E}\end{aligned} \tag{24}$$

となるはずである。多体 (N 体とする) の場合は x を 2 個の座標に分割して考えるので少し違った考察をしなければならず、E もいくつかの値 $E_j' > 0$ に変えなければならないが、やはり $e^{-itH}E_H(B)f$ 上 $\gamma \approx \pm\sqrt{2E_j'}$ であることに変わりはない。これは $t \to \pm\infty$ で散乱状態 $e^{-itH}E_H(B)f$ が相空間内の集合

$$\begin{aligned}PS_E &= \{(x,p) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n | p = \pm\sqrt{2E_j'}x/|x|\}\\ &\qquad (n = 3(N-1))\end{aligned} \tag{25}$$

の近傍に集中することを意味する。この事実はシーガル-ゾーファーによって多体の場合の (15) を援用しながら次のような評価としてまとめられた。2 体の場合で述べる。$g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ の台と $\delta > 0$ が十分小とする。$Q(x)$ をその台が $|\omega| = 1$ なる $\omega \in \mathbf{R}^n$ 方向の十分小さな錐にはいっている関数とし、運動量 p の関数 $P(p)$ をその台がある $\alpha > \delta$ に対し $|p \mp \sqrt{2E}\omega| > \alpha$ なる集合に含まれているものとする。このとき

$\langle x\rangle^{-1/2}Q(x)P(D)g(\gamma)$ は $B = (E-\delta, E+\delta)$ の上で H に関してスムースである。 (26)

多体ではこれはもっと複雑になるが、この評価を用い (18) のようなシュワルツ不等式を用いる議論により、シーガル-ゾーファーは多体短距離力の場合に (17) に相当する極限の存在を示した。このことを多体ハミルトニアン H は漸近的クラスタリングであるという。短距離力の場合はこれから多体の完全性が従う。

多体の完全性は $e^{-itH}E_H(B)f$ が、いくつかの漸近挙動の重ね合わせ (和) として表されるという事である。これは N 個の粒子 $1, \cdots, N$ の分割 $a = \{C_1, \cdots, C_\ell\}$ に対応する。C_j をクラスターというが、N 個の粒子は C_j にはいっているもの同士はまとまって固有状態をなし、$i \neq j$ のとき C_i と C_j の重心は互いに自由粒子のように振る舞うと予想される。これが多体完全性の描像である。実際短距離力の場合にこれが成り立つことを示したのがシーガル-ゾーファーの論文である。多体系ではクラスター分解 a に応じた相空間の分解を考えねばならないので、2 体の場合の (24) 式以下のような単純な議論は展開できない。シーガル-ゾーファーは巧妙だが難解な多体系に対する相空間の分解を用いて (26) を示すことに成功したのである。

(26) の評価および短距離力の場合の完全性の証明は前にも述べたようにシーガル-ゾーファー以降何人かの人によっていくつかの別証明が与えられている。たとえばグラフは 1990 年の論文でエンスの (22) に相当する時間に依存する形で (26) に対応する評価を与え完全性の別証明を行った。また田村英男は 1991 年の論文で (26) を用いるが、完全性の証明の部分では相空間のではなく座標空間 $\mathbf{R}_x^n$ の分解を使う別証明を与えた。筆者も 1991 年の論文で (26) のうち証明が容易な部分と多体の場合の (22) に対応する評価を用いて座標空間の分解を使う完全性の別証明を与えた。また 1991 年のプレプリントでヤファーエフは 2 体の場合のゾンマーフェルトの放射条件を多体の場合に修正

して (26) に対応する評価を与え完全性の別証明を行っている。(26) 自身の別証明はデレジンスキー (1989年) や田村 (1990年) により与えられている。また滑らかな長距離力のみの場合に対してスキプステド (1990年プレプリント), ジェラール (1991年プレプリント) らは (26) より強く $Q(x)P(D)e^{-itH}E_H(B)\langle x\rangle^{-s}$ の時間 t に関する減衰度を与えている。

6 多体長距離力の場合–完全性は成り立つか?

(26) に相当することは長距離力の場合でも成立する。シーガル-ゾーファーは短距離力の論文を書き上げた後長距離力の場合を考え始めた。彼らは 3 体、4 体のクーロン力に対しては完全性の成り立つことを示したようである。(プレプリント) シーガル-ゾーファーはこの論文にいたる前の段階で、クーロン力に対する漸近的クラスタリングの結果を得ていた。(1990年) その論文で彼らは 5 体以上では完全性は成り立たないかも知れないという予想を与えた。多体の場合は完全性は前節で述べたように $e^{-itH}E_H(B)f$ が漸近的にいくつかの固有状態の重ね合わせになるということを意味する。これが成り立たないということは長距離力では $t\to\pm\infty$ で N 個の粒子がいつまでたってもクラスターの間を行ったり来たりして永遠に安定な漸近挙動を示さないということである。これは一種流体力学における乱流のような状況を想像させる。量子力学に従う宇宙を考えるならばそれは永遠に振動し不安定だという予想である。実際はどうなのか? これからの問題である。

(きただ・ひとし, 東京大学大学院数理科学研究科)